6.1.2 Operace s komplexními čísly

Př. 1: Jaký je vztah mezi množinami komplexních a reálných čísel?

Zdá se, že platí: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, že reálná čísla jsou komplexní čísla s nulovou imaginární částí $a + 0i = a$.

Př. 2: Z následujících čísel, vyber čísla komplexní a rozděl je do skupin: $3i$, $1+i\sqrt{2}$, $3-2i$, $\pi+\sqrt{2}$, $2+i-j+k$, $-1+2i$, $3-\sqrt{2}$, $i-\sqrt{3}$, 0, $\frac{1}{3}i$.

Komplexní čísla: $3i$, $1+i\sqrt{2}$, $3-2i$, $\pi+\sqrt{2}$, $-1+2i$, $3-\sqrt{2}$, $i-\sqrt{3}$, 0, $\frac{1}{3}i$.

Reálná čísla: $\pi+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, 0.

Imaginární čísla: $3i$, $1+i\sqrt{2}$, $3-2i$, $-1+2i$, $i-\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}i$.

Ryze imaginární čísla: $3i$, $\frac{1}{3}i$.

Př. 3: Rozhodni, jaké podmínky musí být splněny, aby se dvě komplexní čísla $a+bi$ a $c+di$ rovnala.

dvě komplexní čísla $a+bi$ a $c+di$ se rovnají právě tehdy, když platí $a=c$, $b=d$.

Př. 4: Sečti komplexní čísla $z_1 = 2+3i$ a $z_2 = 1+2i$ a na základě výpočtu definuj součet dvou komplexních čísel $a+bi$ a $c+di$.

$z_1 + z_2 = (2+3i)+(1+2i) = 2+3i+1+2i = 2+1+3i+2i = 3+5i$

Opačné číslo k číslu $z = a+bi$ je číslo $-z = -a-bi$.
Rozdíl $z_1 - z_2$ komplexních čísel z_1, z_2 je součet čísla z_1 a čísla opačného k číslu $z_2 \Rightarrow$ $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. (pořád stejné jako u dvojčlenů)

Př. 5: Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 2-3i$ a $z_2 = -2-3i$. Urči:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_2 - z_1$ d) $-z_1 - z_2$

a) $z_1 + z_2 = (2-3i)+(-2-3i) = 2-3i-2-3i = -6i$

b) $z_1 - z_2 = (2-3i)-(-2-3i) = 2-3i+2+3i = 4$

Př. 6: Vynásob komplexní čísla $z_1 = 2+3i$ a $z_2 = 1+2i$ a na základě výpočtu definuj součin dvou komplexních čísel $a+bi$ a $c+di$.

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1+2i) = 2\cdot 1 + 2\cdot 2i + 3i\cdot 1 + 3i\cdot 2i = 2+4i+3i+6i^2 = 2+7i-6 = -4+7i$

Př. 7: Zapiš v algebraickém tvaru:

a) $2+3i+4-2i$ b) $(2+3i)(4-i)$ c) $(1-2i)(-3+2i)$

d) $(2-3i)(2+3i)$ e) $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$

a) $2+3i+4-2i = 6+i$ b) $(2+3i)(4-i) = 8-2i+12i-3i^2 = 8+10i-3(-1) = 11+10i$

c) $(1-2i)(-3+2i) = -3+2i+6i-4i^2 = -3+4+8i = 1+8i$

d) $(2-3i)(2+3i) = 4-9i^2 = 4+9+0i = 13$

e) $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3} + i\sqrt{2}\sqrt{2} + i\sqrt{3}\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6}+2i+3i-\sqrt{6} = 5i$

Př. 8: Urči součin komplexního čísla $a+bi$ a nuly.

$(a+bi)0 = 0\cdot a + 0\cdot bi = 0 \Rightarrow$ součin nuly a libovolného komplexního čísla je roven nule.

Př. 9: Dokaž, že součin komplexních čísel $a+bi$ a $c+di$ je komutativní.

$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$(c+di)(a+bi) = ca + cbi + dai + +dbi^2 = (ca-db) + (cb+da)i = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Sčítání a násobení komplexních čísel je:

- **komutativní (nezáleží na pořadí)**
- **asociativní (nezáleží na uzávorkování)**
- **distributivní (můžeme roznásobovat závorky)**

Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich.

Př. 10: **(BONUS)** Věta „Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich“ zní samozřejmě, ale vzhledem k tomu, že násobení komplexních čísel je složitější než násobení reálných čísel, je potřeba ji dokázat. Pokus se o to.

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i = 0 + 0i$

$\Rightarrow$ Platí: $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$ a zároveň $a_1b_2 + b_1a_2 = 0$ (získali jsme soustavu rovnic).

$a_1a_2 - b_1b_2 = 0 \quad / a_2$ $\qquad$ $a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \quad / \cdot b_2$

$a_1a_2^2 - a_2b_1b_2 = 0$ $\qquad$ $a_1b_2^2 + b_1a_2b_2 = 0$

Rovnice sečteme: $\begin{array}{l} a_1a_2^2 - a_2b_1b_2 = 0 \\ \underline{a_1b_2^2 + a_2b_1b_2 = 0} \end{array}$ $\quad a_1a_2^2 + a_1b_2^2 = 0$, $a_1\left(a_2^2 + b_2^2\right) = 0 \Rightarrow$ součinový tvar.

a) Platí $a_2^2 + b_2^2 = 0$

$\Rightarrow$ součet druhých mocnin reálných čísel se rovná nule, jen když jsou obě rovny nule.

$\Rightarrow a_2 = b_2 = 0 \Rightarrow$ komplexní číslo $z_2 = 0$.

b) platí $a_1 = 0$

$a_1a_2 - b_1b_2 = 00 - b_1b_2 = 0 \Rightarrow b_1b_2 = 0$

$a_1b_2 + b_1a_2 = 0 + b_1a_2 = 0 \Rightarrow b_1a_2 = 0$

Platí: $b_1b_2 = b_1a_2 = 0$. Pokud, není druhé číslo $z_2 = a_2 + ib_2$ rovno nule, musí platit $b_1 = 0$.

Platí tedy: $a_1 = b_1 = 0 \Rightarrow$ komplexní číslo $z_1 = 0$.

Př. 11: Spočti:

a) $3(-1+i)(1-i) - i(2-3i)$ $\qquad$ b) $i(2-i)(3+i)(-1-i) - (2+i)(3-i)(3+2i)$

c) $i\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) + \sqrt{6} + i\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - i\sqrt{2}\right)$

$3(-1+i)(1-i) - i(2-3i) = 3\left(-1+i+i-i^2\right) - 2i + 3i^2 = 3\left[-1+2i-(-1)\right] - 2i + 3(-1) =$

$3(2i) - 2i - 3 = -3 + 4i$

b)

$i(2-i)(3+i)(-1-i) - (2+i)(3-i)(3+2i) =$

$= \left(2i - i^2\right)\left(-3 - 3i - i - i^2\right) - \left(6 - 2i + 3i - i^2\right)(3+2i) = (2i+1)(-2-4i) - (7+i)(3+2i) =$

$= \left(-4i - 8i^2 - 2 - 4i\right) - \left(21 + 14i + 3i + 2i^2\right) = (6-8i) - (19+17i) = 6 - 8i - 19 - 17i =$

$= -13 - 25i$

c)

$i\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) + \sqrt{6} + i\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - i\sqrt{2}\right) =$

$i\left(\sqrt{6} + i\sqrt{6} + 2i + 2i^2\right) + \sqrt{6} + i\sqrt{2} + 2i^2 + \sqrt{6} - 2i^2 = i\left(\sqrt{6} + i\sqrt{6} + 2i - 2\right) + 2\sqrt{6} + i\sqrt{2} =$

$= i\sqrt{6} + i^2\sqrt{6} + 2i^2 - 2i + 2\sqrt{6} + i\sqrt{2} = i\sqrt{6} - \sqrt{6} - 2 - 2i + 2\sqrt{6} + i\sqrt{2} =$

$= \sqrt{6} - 2 + i\left(\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2\right)$